

p - простое число, большее трех. Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24 ("делится" - это значит делится нацело, без остатка).

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$$

Если p - просто, большее 2, то p - нечетное, а значит $p - 1$ и $p + 1$ - числа четные $\Rightarrow (p - 1)(p + 1)$ делится на 4: каждая скобка делится на 2. Если p больше 3, то p на 3 точно не делится. Раз p не делится на 3, то хотя бы 1 из его соседей делиться на 3.

$$p = 2k + 1$$

$$\begin{aligned} p^2 - 1 &= (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k = 4k(k + 1) \end{aligned}$$

Из 2 подряд идущих хотя бы 1 - четное, значит $p^2 - 1$ делиться на 8 $\Rightarrow p^2 - 1$ делится на 24 без остатка

